

Introduction au monde quantique

6

La mécanique quantique a été élaborée dans la première moitié du $XX^{\text{ème}}$ siècle par de nombreux physiciens dont N. Bohr, L. de Broglie, P. Dirac, A. Einstein, W.K. Heisenberg, M. Planck et E. Schrödinger. Cette théorie est nécessaire pour décrire la matière à l'échelle atomique et au-dessous. Ses prédictions n'ont, à l'heure actuelle, jamais été mises en défaut. Elles ont permis la réalisation d'inventions aussi importantes que le laser, le microprocesseur, l'horloge atomique, l'imagerie médicale par résonance magnétique nucléaire...

Les phénomènes quantiques qui apparaissent à l'échelle microscopique sont parfois difficiles à appréhender car il ne correspondent pas à notre intuition naturelle fondée sur notre expérience du monde macroscopique. À la base de leur compréhension se trouve l'idée de dualité onde-particule et la notion d'onde de matière. Il en découle l'inégalité de Heisenberg et la quantification de l'énergie.

1 La dualité onde-particule de la lumière

1.1 Introduction

On a présenté dans les chapitres précédents l'onde lumineuse et les phénomènes d'interférences et de diffraction. Ces phénomènes caractéristiques des ondes ont été étudiés au $XIX^{\text{ème}}$ siècle. Ils montrent l'**aspect ondulatoire** de la lumière.

D'autre part, des phénomènes découverts au $XX^{\text{ème}}$ siècle ne peuvent être interprétés que si l'on admet l'existence de « particules de lumière », que l'on appelle les **photons**. La lumière a aussi un **aspect corpusculaire**.

Ce double comportement est appelé **dualité onde-particule**. Il est impossible à théoriser dans le cadre de la mécanique classique, mais trouve son interprétation dans le cadre la mécanique quantique.

1.2 Historique de la découverte du photon

a) Le rayonnement thermique

En 1900, pour réussir à expliquer les propriétés de l'émission thermique du rayonnement électromagnétique d'un corps chauffé (ce rayonnement est pour l'essentiel dans le domaine infrarouge), Max Planck utilisa l'hypothèse que l'énergie s'échange entre la matière et le rayonnement par multiples d'une valeur minimale, le **quantum d'énergie**, dont l'expression est :

$$E = h\nu$$

où ν est la fréquence du rayonnement et h une constante. Cette constante appelée *Hilfskonstante* par Planck, soit en français *constante auxiliaire*, est devenue depuis l'une des constantes fondamentales de la physique. Sa valeur actuellement admise est :

$$h = 6,636\,176 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}.$$

b) L'effet photoélectrique

L'**effet photoélectrique** est l'émission d'électrons par un métal lorsqu'il est éclairé par un rayonnement du domaine visible ou ultraviolet (figure 6.1). Le phénomène n'existe que si la fréquence du rayonnement est supérieure à une fréquence seuil ν_S qui dépend de la nature du métal. Si la fréquence est plus petite que ν_S il n'y a pas d'effet photoélectrique, même si le faisceau est très intense.

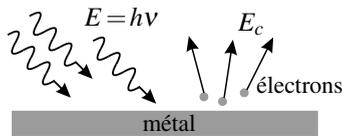


Figure 6.1 – Effet photoélectrique. Chaque électron de masse m_e et vitesse v_e emporte une énergie cinétique : $E_c \leq h\nu - W$.

En 1905, Albert Einstein proposa une interprétation théorique de l'effet photoélectrique en reprenant l'idée de Planck. Il supposa que le rayonnement lui-même est constitué de « quanta de lumière », sortes de grains de lumière contenant l'énergie $E = h\nu$.

L'hypothèse de base de la théorie d'Einstein est qu'un électron du métal peut absorber *un seul* quantum de lumière. Il est alors arraché au métal si l'énergie $E = h\nu$ est supérieure à une valeur minimale dépendant du métal et appelée travail d'extraction W . La condition $E > W$ se traduit par :

$$\nu > \nu_S = \frac{W}{h}.$$

La théorie d'Einstein explique ainsi l'existence de la fréquence seuil. De plus elle prédit que l'énergie cinétique maximale emportée par l'électron est :

$$E_{c,\max} = E - W = h(\nu - \nu_S).$$

Des expériences, menées par Robert Andrews Millikan entre 1905 et 1915, confirmèrent cette formule et donnèrent une valeur de la constante de Planck en bon accord avec la valeur provenant des expériences sur le rayonnement thermique. Einstein reçut le prix Nobel de physique pour son travail sur l'effet photoélectrique en 1922.

c) La diffusion Compton

Le phénomène qui finit de convaincre la communauté scientifique de l'existence de particules associées au rayonnement électromagnétique est la **diffusion Compton** découverte par Arthur Compton en 1922.

La diffusion d'un rayonnement est le phénomène selon lequel un échantillon de matière, recevant un rayonnement incident, renvoie dans tout l'espace un rayonnement de même nature appelé onde diffusée.

Classiquement on explique la diffusion des ondes électromagnétiques par le fait que les électrons contenus dans la matière sont mis en mouvement sous l'action du champ électromagnétique de l'onde incidente. L'onde diffusée est créée par les électrons en mouvement qui oscillent à la fréquence de l'onde incidente (parce que le principe fondamental de la dynamique est une équation linéaire, comme on le verra dans la partie *Mécanique* de ce livre). L'onde diffusée a donc la même fréquence que l'onde incidente (parce que les équations de l'électromagnétisme sont aussi linéaires, voir cours de deuxième année).

En envoyant des rayons X de longueur d'onde $\lambda = 0,071$ nm sur une cible de carbone, A. Compton observa un rayonnement diffusé de longueur d'onde *différente* de la longueur d'onde incidente, en contradiction avec la théorie classique. Il put interpréter les résultats expérimentaux en faisant hypothèse d'une collision entre les électrons contenus dans l'échantillon et des particules arrivant avec le rayonnement incident (voir figure 6.2), particules dotées de l'énergie $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ et de la quantité de mouvement :

$$p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Au cours de cette collision la particule du rayonnement perd une partie de son énergie, ce qui explique qu'elle reparte avec une énergie $E' < E$, donc une fréquence $\nu' < \nu$ et une longueur d'onde $\lambda' > \lambda$. Le calcul fondé sur les lois de la mécanique relativiste donne des résultats quantitatifs en parfait accord avec l'expérience.

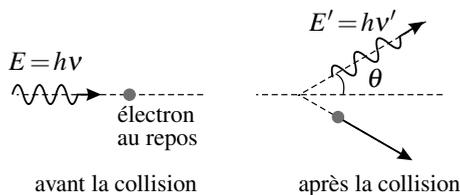


Figure 6.2 – Effet Compton : collision entre un photon et un électron. Le calcul relativiste donne : $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$ où m_e est la masse de l'électron.

1.3 Le photon

a) Définition

La particule associée à la lumière s'appelle le **photon**. Ses propriétés sont les suivantes :

- Le photon a une masse nulle.
- Le photon se déplace à la vitesse de la lumière, égale à $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans le vide.
- Le photon associé à une lumière de fréquence ν et de longueur d'onde $\lambda = \frac{c}{\nu}$ possède l'énergie :

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \quad (6.1)$$

où h est la constante de Planck.

- Le photon associé à une lumière de fréquence ν se propageant dans la direction du vecteur unitaire \vec{u} possède la quantité de mouvement :

$$\vec{p} = \frac{E}{c} \vec{u} = \frac{h\nu}{c} \vec{u} = \frac{h}{\lambda} \vec{u}. \quad (6.2)$$



Dans le cas du photon, la formule classique de la quantité de mouvement donnée dans la partie *Mécanique*, $\vec{p} = m\vec{v}$, ne s'applique pas. Il faut utiliser les équations relativistes, qui sont en dehors du programme.

b) Ordre de grandeur de l'énergie d'un photon

L'énergie du photon correspondant à une lumière de longueur d'onde $\lambda = 500 \text{ nm}$ est :

$$E = \frac{6,64 \cdot 10^{-34} \times 3,00 \cdot 10^8}{500 \cdot 10^{-9}} = 3,98 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

On constate que le joule n'est pas une unité adaptée pour exprimer cette énergie. Il est courant d'exprimer l'énergie du photon en électron-volt, une unité d'énergie telle que $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. L'énergie du photon précédent est égale à $\frac{3,98 \cdot 10^{-19}}{1,60 \cdot 10^{-19}} = 2,48 \text{ eV}$.

Pour un photon de longueur d'onde quelconque λ , sachant que l'énergie est inversement proportionnelle à la longueur d'onde, on peut écrire : $E = 2,48(\text{eV}) \times \frac{500(\text{nm})}{\lambda(\text{nm})}$. Il est ainsi pratique de retenir que l'énergie du photon est donnée par :

$$E(\text{eV}) = \frac{1240}{\lambda(\text{nm})}. \quad (6.3)$$

La notion de photon s'étend aux ondes électromagnétiques autres que la lumière. Le tableau 6.1 donne les gammes d'énergie des photons pour les différents domaines des ondes électromagnétiques. L'aspect corpusculaire ressort d'autant plus que l'énergie du photon est élevée.

On peut donc prévoir qu'il sera très marqué pour les rayonnements γ et X, mais pratiquement imperceptible pour les ondes hertziennes. Inversement l'aspect ondulatoire du rayonnement ressort d'autant plus que la longueur d'onde est élevée.

rayonnement	λ (m)	ν (Hz)	E (eV)
rayons gamma	$< 2.10^{-11}$	$> 1,5.10^{19}$	> 60000
rayons X	$2.10^{-11} - 1.10^{-8}$	$3.10^{16} - 1,5.10^{19}$	$125 - 60000$
ultra-violets	$1.10^{-8} - 4.10^{-7}$	$7,5.10^{14} - 3.10^{16}$	$3 - 125$
visible	$4.10^{-7} - 7,5.10^{-7}$	$4.10^{14} - 7,5.10^{14}$	$1,5 - 3$
infrarouges	$7,5.10^{-7} - 3.10^{-4}$	$1.10^{12} - 4.10^{14}$	$4.10^{-3} - 1,5$
ondes hertziennes	$> 3.10^{-4}$	$< 1.10^{12}$	$< 4.10^{-3}$

Tableau 6.1 – Longueur d'onde, fréquence et énergie des différents types de photons.

c) Nombre de photons

Dans les expériences d'optique, l'aspect granulaire de la lumière n'apparaît généralement pas. L'explication est que ces expériences mettent en jeu un très grand nombre de photons à la seconde.

On peut calculer, par exemple, le nombre de photons émis chaque seconde par un laser hélium-néon de longueur d'onde $\lambda = 633$ nm et de puissance $P = 1,0$ mW. En $\Delta t = 1$ s, l'énergie lumineuse délivrée par le laser est $E_{\text{laser}} = P\Delta t = 1,0.10^{-3}$ J. L'énergie d'un photon

est $E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,64.10^{-34} \times 3.10^8}{633.10^{-9}} = 3,1.10^{-19}$ J. Le nombre de photons est donc :

$$N = \frac{E_{\text{laser}}}{E} \simeq 3,2.10^{15}.$$

C'est un nombre élevé mais, à titre de comparaison, bien plus petit que le nombre d'Avogadro qui est l'ordre de grandeur du nombre d'atomes ou de molécules dans une expérience de chimie.

Pour voir les photons un à un, on peut imaginer réduire la puissance du faisceau. En réduisant d'un facteur 10^9 la puissance, on obtient $3,2.10^6$ photons par seconde, soit un photon toutes les $0,31.10^{-6}$ s en moyenne. Les photons se déplaçant à la vitesse $c = 3,0.10^8$ m·s⁻¹, deux photons successifs sont alors séparés en moyenne de $3,0.10^8 \times 0,31.10^{-6} = 93$ m. Avec un détecteur de résolution temporelle de l'ordre de 10^{-7} s, on peut espérer recevoir des photons un à un. En fait ce système simple ne fonctionne pas correctement : à cause du caractère aléatoire de l'émission du laser, les photons sont émis irrégulièrement et plusieurs photons peuvent être détectés en même temps.

On sait cependant produire des photons un à un avec des systèmes beaucoup plus élaborés appelés **sources de photons uniques**. Avec de telles sources on réalise des expériences qui illustrent remarquablement le double aspect, corpusculaire et ondulatoire, de la lumière.

1.4 Une expérience avec des photons uniques

a) La lame semi-réfléchissante

Définition La **lame semi-réfléchissante** est un dispositif optique qui divise un faisceau lumineux incident en un faisceau lumineux réfléchi et un faisceau lumineux transmis d'égales puissances.

Interprétation ondulatoire Dans une vision ondulatoire de la lumière, l'onde incidente donne deux ondes : une onde réfléchie et une onde transmise (voir figure 6.3). La puissance transportée par chacune de ces deux ondes est égale à la moitié de la puissance transportée par l'onde incidente :

$$\mathcal{P}_{\text{transmise}} = \mathcal{P}_{\text{réfléchi}} = \frac{1}{2} \mathcal{P}_{\text{incidente}}.$$

Or on a vu que la puissance \mathcal{P} transportée par l'onde lumineuse est proportionnelle au carré de son amplitude A :

$$\mathcal{P} = KA^2$$

où K est une constante. Les amplitudes des ondes transmise et réfléchie, $A_{\text{réfléchi}}$ et $A_{\text{transmise}}$ sont donc reliées à l'amplitude $A_{\text{incidente}}$ de l'onde incidente par :

$$A_{\text{transmise}} = A_{\text{réfléchi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} A_{\text{incidente}}.$$

Interprétation corpusculaire Dans l'image où la lumière est constituée photons indivisibles, la division du faisceau incident en deux faisceaux s'interprète ainsi : chaque photon peut être soit transmis, il traverse la lame, soit réfléchi, il « rebondit » sur la lame (voir figure 6.4).

Il y a autant de photons transmis que de photons réfléchis puisque les deux faisceaux ont la même puissance.

On a besoin des deux interprétations, ondulatoire et corpusculaire, pour comprendre les expériences : elles sont complémentaires. La mécanique quantique permet d'unifier les deux points de vue.

b) Une preuve du comportement corpusculaire de la lumière

On ne peut plus considérer à l'heure actuelle que l'effet photoélectrique et l'effet Compton prouvent le caractère corpusculaire de la lumière car il est possible de les interpréter de ma-

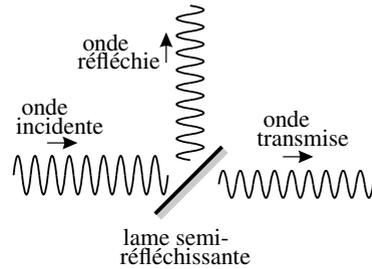


Figure 6.3 – lame semi-réfléchissante dans une vision ondulatoire.

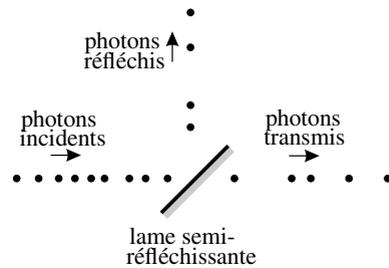


Figure 6.4 – lame semi-réfléchissante dans une vision corpusculaire.

nière satisfaisante en traitant le rayonnement comme un champ électromagnétique classique et l'électron comme un système quantique.

Une expérience considérée à l'heure actuelle comme une preuve du comportement corpusculaire consiste à envoyer un faisceau de photons uniques sur une lame semi-réfléchissante. Des détecteurs très sensibles recueillent les faisceaux transmis et réfléchis (voir figure 6.5).

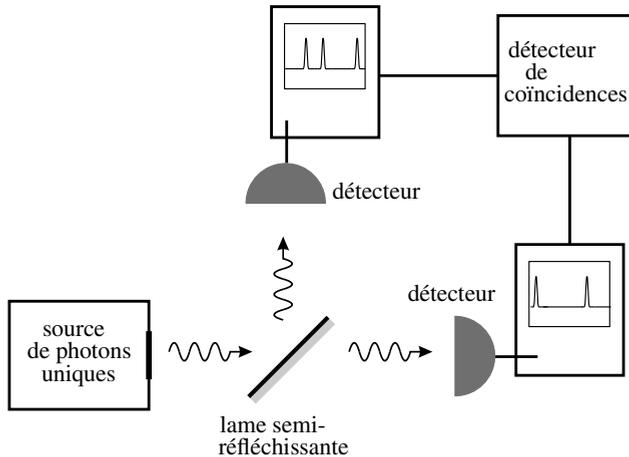


Figure 6.5 – Expérience démontrant le caractère corpusculaire de la lumière.

On constate que :

- les détecteurs fournissent des signaux constitués de pics de durée très brève à des instants aléatoires,
- les pics des deux détecteurs n'arrivent *jamais* simultanément (pas de coïncidence détectée).

Le premier point évoque l'arrivée de photons successifs mais n'est pas incompatible avec une image ondulatoire : en effet, l'onde pourrait être une suite d'impulsions très courtes arrivant aléatoirement. Mais dans ce cas, les pics devraient être détectés simultanément sur les deux détecteurs ce qui n'est pas le cas d'après la deuxième observation. En conclusion, l'expérience montre sans équivoque une manifestation corpusculaire de la lumière.

De plus, d'après la première observation, les photons sont *aléatoirement* réfléchis ou transmis. Quelles sont les probabilités de ces deux événements ? La lame semi-réfléchissante partageant le faisceau incident en deux faisceaux transportant la même puissance, on a :

$$Prob(\text{réflexion}) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad Prob(\text{transmission}) = \frac{1}{2}.$$

1.5 Franges d'interférences et photons

a) Expérience des fentes de Young

L'expérience des fentes de Young est une expérience classique d'interférences lumineuses qui sera étudiée de manière approfondie dans le cours de deuxième année. On se contentera ici d'en donner le principe.

Une source ponctuelle, quasiment monochromatique, éclaire un écran opaque percé de deux fentes rectilignes identiques, très fines, derrière lesquelles on place un écran parallèle au plan des fentes. Sur l'écran on observe des **franges rectilignes** parallèles aux fentes.

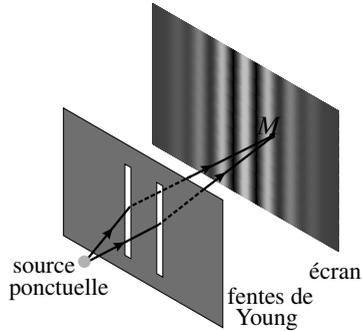


Figure 6.6 – Principe de l'expérience des fentes de Young.

L'explication qualitative du phénomène est la suivante : en tout point M de l'écran parviennent deux ondes qui sont diffractées par les deux fentes de Young. Les longueurs des deux rayons lumineux entre la source et M sont différentes, donc les deux ondes sont décalées dans le temps ce qui se traduit par un déphasage qui dépend de la position de M sur l'écran.

On observe ainsi des franges brillantes, au centre desquelles le déphasage est un multiple de 2π (condition d'interférence constructive) et des franges sombres au centre desquelles le déphasage est un multiple impair de π (condition d'interférence destructive).

b) Construction d'une figure d'interférences photon par photon

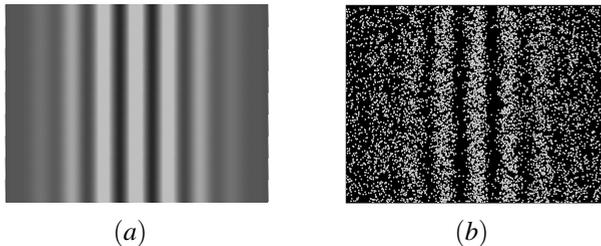


Figure 6.7 – Franges d'interférences : (a) d'après le calcul de l'optique ondulatoire, (b) avec 7500 photons environ (simulations numériques de l'auteur).

Que voit-on si l'on réalise l'expérience des fentes de Young (ou une autre expérience d'interférences lumineuses) avec une source envoyant très peu de photons ? L'expérience peut être réalisée avec une source classique atténuée ou avec une source de photons uniques. On enregistre la figure sur un capteur CCD très sensible. Le temps de pose détermine le nombre

de photons reçus. On peut aussi superposer différents clichés à temps de pose égal pour avoir un nombre croissant de photons. Les observations sont les suivantes :

- Chaque photon donne un point lumineux sur l'image, se comportant donc comme un corpuscule localisé, mais en un point aléatoire.
- Les impacts des photons se répartissent inégalement sur l'écran, dessinant, au fur et à mesure que le nombre de photons augmente, les franges d'interférences prédites par la théorie des interférences de deux ondes lumineuses.

La figure 6.7 montre le résultat d'une simulation de figure d'interférences pour un nombre macroscopique de photons et pour un petit nombre de photons. La simulation est fondée sur l'hypothèse que la probabilité de recevoir un photon en un point est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde lumineuse (calculée par la théorie ondulatoire) en ce point. L'aspect de la figure simulée est très semblable au résultat de l'expérience réelle. S'il souhaite le vérifier, le lecteur curieux pourra se rendre sur la page http://www.physique.ens-cachan.fr/old/franges_photon/interference.htm et y télécharger le film d'une expérience réelle, montrant une figure d'interférences analogue se construisant photon par photon.

c) Conclusion

La lumière présente un double aspect corpusculaire et ondulatoire, tous les deux perceptibles dans les expériences d'interférences lumineuses avec peu de photons. Les photons sont détectés de manière aléatoire. La probabilité de détecter un photon en un point est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'onde lumineuse en ce point.

2 La dualité onde-particule de la matière

2.1 La longueur d'onde de de Broglie

a) L'onde « de matière » de de Broglie

On vient de voir le double aspect ondulatoire et corpusculaire de la lumière et plus généralement de tout rayonnement électromagnétique.

L'idée symétrique que les particules de matière (électrons, protons, neutrons...), par définition de nature corpusculaire, puissent avoir aussi un comportement ondulatoire, a été envisagée pour la première fois en 1923 par Louis de Broglie. Il postula l'existence pour toute particule d'une **onde de matière** qui lui est associée et établit sur des arguments théoriques une expression pour la longueur d'onde λ_{DB} de cette onde :

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p}, \quad (6.4)$$

où p est la quantité de mouvement (ou impulsion) de la particule et h la constante de Planck. La relation fondamentale précédente est appelée **relation de de Broglie** et λ_{DB} est appelée **longueur d'onde de de Broglie** de la particule.

Remarque

On a vu plus haut une relation identique à la relation (6.4) pour le photon.

Pour calculer la quantité de mouvement de la particule on peut utiliser l’expression de la mécanique classique $p = mv$ où v est la vitesse de la particule (voir partie *Mécanique* de cet ouvrage) à condition que v soit très inférieure à la vitesse de la lumière $c \simeq 3.10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. La relation de de Broglie devient dans ce cas :

$$\lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{mv}. \tag{6.5}$$

Dans le cas contraire il faut utiliser la formule relativiste pour la quantité de mouvement. Il est courant d’admettre que la formule classique est valable si $v < \frac{c}{10}$ parce que l’erreur relative introduite par l’usage de la formule classique, égale à $\frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2$, est inférieure à 1% dans ce cas.

b) Première vérification expérimentale

En 1927, les américains C.J. Davisson et L. Germer apportent la première preuve expérimentale de l’idée de de Broglie, en observant la diffraction d’un faisceau d’électrons par un monocristal de nickel.

La diffraction est un phénomène caractéristique des ondes. Si un faisceau d’électrons est diffracté, c’est la preuve qu’il possède un caractère ondulatoire.

Pourquoi un solide cristallin diffracte-t-il certaines ondes ? Les solides cristallins présentent au niveau atomique un arrangement parfaitement ordonné (voir cours de chimie), périodique dans trois directions de l’espace avec des périodes de l’ordre de $10^{-10} \text{ m} = 0,1 \text{ nm}$. Or les objets périodiques ont la propriété de diffracter d’une manière caractéristique une onde dont la longueur d’onde est proche de leur période. Ainsi, la découverte en 1912 par Max von Laue de la diffraction des rayons X par les cristaux (voir figure 6.8) avait prouvé à la fois la nature ondulatoire de ces rayons et la structure périodique des cristaux. Elle avait aussi permis de mesurer la longueur d’onde des rayons X.

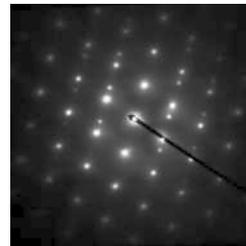


Figure 6.8 – Cliché de diffraction des rayons X par l’austénite.

De la même manière, la diffraction d’un faisceau d’électrons par un cristal de nickel montra que ces particules peuvent avoir un comportement ondulatoire et permit de vérifier quantitativement la formule de de Broglie.

Exemple

Quelle était la longueur d’onde de de Broglie dans l’expérience de Davisson et Germer ?
 Les électrons, accélérés par une différence de potentiel de 54 V (voir le chapitre sur les

mouvements de charges dans la partie *Mécanique*), avaient une énergie cinétique

$$E_c = 54 \text{ eV} = 8,6 \cdot 10^{-18} \text{ J.}$$

La masse d'un électron est $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. Si l'on suppose que la mécanique classique s'applique, l'énergie cinétique est donnée par la formule $E_c = \frac{1}{2} m_e v^2$, de sorte que la vitesse d'un électron ayant cette énergie est :

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m_e}} = \sqrt{2 \times \frac{8,6 \cdot 10^{-18}}{9,11 \cdot 10^{-31}}} = 4,35 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Cette vitesse étant inférieure à $\frac{c}{10}$ l'emploi de la formule classique est validé. On peut ensuite calculer :

$$\lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{m_e v} = \frac{6,64 \cdot 10^{-34}}{9,11 \cdot 10^{-31} \times 4,35 \cdot 10^6} = 1,68 \cdot 10^{-10} \text{ m.}$$

Cette longueur d'onde est bien de l'ordre de 0,1 nm.

c) Applications actuelles

Microscopie électronique Un microscope optique ne peut révéler des détails plus petits que l'ordre de grandeur de la longueur d'onde de la lumière, soit plus petits qu'un micromètre. La longueur d'onde de de Broglie d'électrons suffisamment accélérés est bien plus courte. Elle est voisine de 0,1 nm pour des électrons d'énergie cinétique égale à 100 eV. Dans certains appareils l'énergie cinétique des électrons atteint 100 keV et la longueur d'onde est de l'ordre de 1 pm = $1 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ (pour appliquer la formule de de Broglie dans ce cas il est nécessaire d'utiliser la formule relativiste de la quantité de mouvement). Cependant il faut que l'échantillon supporte une telle énergie.

Exemple

Quelle est la longueur d'onde de de Broglie d'un électron ayant une énergie cinétique $E_c = 100 \text{ keV}$? En appliquant la formule classique de l'énergie cinétique on trouve :

$$v = \sqrt{\frac{2E_c}{m_e}} = \sqrt{2 \times \frac{100 \cdot 10^3 \times 1,60 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}}} = 1,9 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \simeq 0,6c.$$

Cette vitesse est supérieure 0,1c. Les formules classiques ne sont donc pas valides. Il faut donc appliquer les formules relativistes :

$$E_c = (\gamma - 1) m_e c^2 \quad \text{et} \quad p = \gamma m_e v, \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ces formules *ne sont pas exigibles* dans le programme des classes préparatoires. En revanche, le candidat aux concours peut avoir à les appliquer si elles lui sont fournies.

On en déduit :

$$\gamma = 1 + \frac{E_c}{m_e c^2} = 1 + \frac{100 \cdot 10^3 \times 1,60 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31} \times (3,00 \cdot 10^8)^2} \simeq 1,20,$$

puis :

$$v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = 3,00 \cdot 10^8 \times \sqrt{1 - \frac{1}{(1,20)^2}} \simeq 1,64 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

puis :

$$p = \gamma m_e v = 1,20 \times 9,11 \cdot 10^{-31} \times 1,64 \cdot 10^8 \simeq 1,80 \cdot 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1},$$

et finalement :

$$\lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{p} = \frac{6,64 \cdot 10^{-34}}{1,80 \cdot 10^{-22}} = 6,75 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 3,7 \text{ pm}.$$

Diffraction des neutrons Les neutrons dits « thermiques », appelés ainsi parce qu'ils sont à une température de l'ordre de la température ambiante (de l'ordre de 300 K) ont une longueur d'onde de de Broglie de l'ordre de la taille d'un atome. Ainsi, ces neutrons sont utilisés comme sonde pour explorer la matière à l'échelle atomique.

Exemple

Quelle est la longueur d'onde de de Broglie de neutrons de masse $m_n = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ et de température $T = 300 \text{ K}$?

L'énergie cinétique moyenne d'un neutron sous l'effet de l'agitation thermique (voir la partie *Thermodynamique*) est :

$$E_c = \frac{3}{2} k_B T,$$

où $k_B \simeq 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ est la constante de Boltzmann. Or $E_c = \frac{1}{2} m_n v^2$, le neutron a donc une vitesse égale en moyenne à :

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_n}} = \sqrt{\frac{3 \times 1,38 \cdot 10^{-23}}{1,67 \cdot 10^{-27}}} = 2,73 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Cette vitesse très inférieure à c justifie le calcul par une formule classique. La longueur d'onde de de Broglie est donc :

$$\lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{m_n v} = \frac{h}{\sqrt{3m_n k_B T}} \simeq \frac{6,64 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{3 \times 1,67 \cdot 10^{-27} \times 1,38 \cdot 10^{-23} \times 300}} \simeq 1,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}.$$

2.2 Expériences d'interférences de particules

La théorie de de Broglie est illustrée de manière marquante par des expériences d'interférences de particules réalisées au cours des trois dernières décennies.

a) Interférences d'électrons

La figure 6.9 montre le résultat d'une expérience d'interférences d'électrons réalisée en 1989 par les chercheurs japonais A. Tonomura, J. Endo, T. Matsuda, T. Kawasaki et H. Ezawa. Il s'agit d'une expérience analogue à l'expérience des fentes de Young. Les électrons, après leur passage à travers les « fentes », tombent sur un film fluorescent jouant le rôle d'« écran ». Chaque électron arrivant sur le film provoque l'émission d'environ 500 photons, collectés par un dispositif d'imagerie. Sur le document présenté sur la figure 6.9 chaque point lumineux témoigne de l'arrivée d'un électron.

Dans cette expérience les électrons arrivent un à un sur le détecteur. En effet, le flux d'électrons à travers l'appareil est maintenu à une valeur très faible, de l'ordre de 10^3 électrons par seconde soit un électron toutes les 10^{-3} s. Ces électrons ont une énergie cinétique moyenne de 50 keV, donc une vitesse (relativiste) de $1,25 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Ainsi la distance entre deux électrons consécutifs serait de l'ordre de $1,25 \cdot 10^8 \times 1 \cdot 10^{-3} = 1,25 \cdot 10^5 \text{ m} = 125 \text{ km}$ soit bien plus que la taille de l'appareil. Il y a donc un seul électron à la fois dans l'appareil.

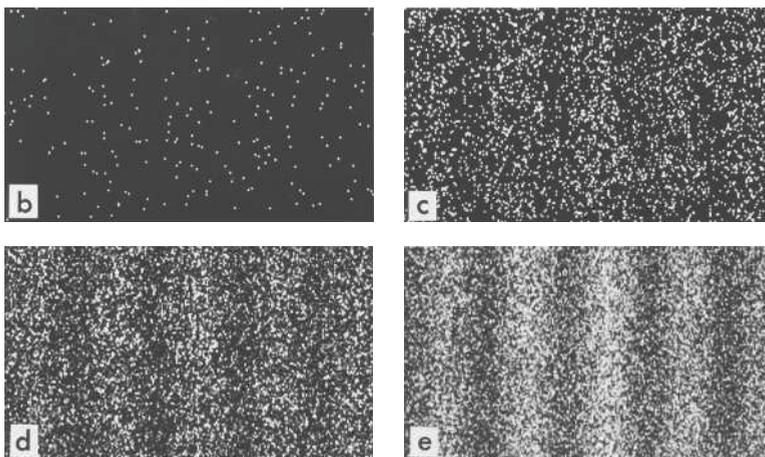


Figure 6.9 – Construction progressive d'une figure d'interférences d'électrons. Chaque point lumineux correspond à l'arrivée d'un électron. Nombres d'électrons respectifs sur les images (b), (c), (d) et (e) : 100, 3000, 20000 et 70000.

L'observation du document de la figure 6.9 appelle les remarques suivantes :

- Les électrons ne se comportent pas comme on s'y attendrait d'après les lois de la mécanique classique. La mécanique classique (c'est-à-dire non quantique) est déterministe : pour des conditions initiales données (position et vitesse initiale de l'électron) on trouve

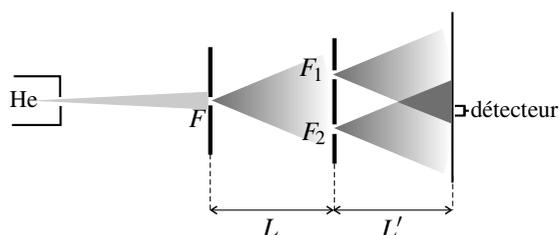


Figure 6.10 – Expérience d'interférences d'atomes d'hélium. O. Carnal, J. Mlynek *Phys. Rev. Lett.*, 1991.

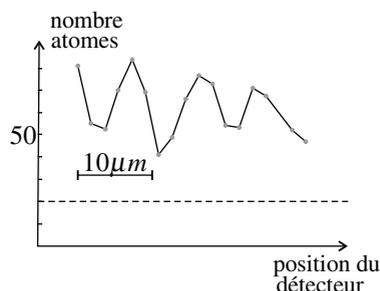


Figure 6.11 – Nombres d'atomes détectés durant 10 minutes en fonction de la position du détecteur.

une trajectoire bien définie¹. Dans ce cas on devrait avoir en théorie *un* point d'impact sur l'écran et en pratique des points regroupés. Au lieu de cela, on observe, notamment sur la photo (b), une répartition aléatoire des points d'impacts. Ainsi : *chaque électron est détecté en un point aléatoire*.

- De la photographie b à la photographie e, au fur et à mesure que le nombre d'électrons détectés croît, apparaît une modulation régulière du nombre d'impacts enregistrés. Des franges d'interférences tout à fait analogues à celles que l'on obtient avec des photons se dessinent peu à peu.

b) Interférences d'atomes

En 1991, O. Carnal et J. Mlynek ont réalisé une véritable expérience de fentes de Young avec des atomes d'hélium. La très grande difficulté de cette expérience tient, entre autres, à la très faible valeur de la longueur d'onde de de Broglie, qui dans ce cas vaut $\lambda_{DB} = 0,103 \text{ nm}$. Les fentes de Young ont une largeur de $s_2 = 1 \mu\text{m}$ et leurs centres sont séparés de $a = 8 \mu\text{m}$. Dans le cas d'une expérience d'interférences lumineuses, la longueur d'onde est 10^3 à 10^4 fois plus grande et l'écartement des fentes 10^3 fois plus grand. Les dimensions de l'expérience sont adaptées à la longueur d'onde mise en jeu.

Le schéma de l'expérience est représenté sur la figure 6.10 : le faisceau d'atomes d'hélium est diffracté par la fente F de largeur $s_1 = 2 \mu\text{m}$, puis par les fentes F_1 et F_2 placées à distance $L = 64 \text{ cm}$ de la première fente. On détecte les atomes d'hélium dans le plan situé à distance $L' = 64 \text{ cm}$ des fentes, avec un détecteur de $2 \mu\text{m}$ de largeur, dans la zone de recouvrement des faisceaux issus de F_1 et F_2 .

Les atomes d'hélium ont, comme les électrons de l'expérience précédente, un comportement quantique : un atome donné a une certaine probabilité d'être vu par le détecteur. Le résultat du comptage d'atomes par le détecteur est donc aléatoire et il ne traduit cette loi de probabilité que si un nombre suffisamment grand d'atomes est passé par le dispositif.

Le nombre d'atomes détectés durant 10 minutes est représenté en fonction de la position du

1. Ceci est encore vrai en mécanique relativiste.

détecteur sur la figure 6.11. Le trait en pointillé représente le bruit de fond du détecteur que l'on mesure en occultant le faisceau à l'entrée du dispositif. Les points expérimentaux sont en gris et la ligne noire est seulement un guide pour l'œil. On observe ici aussi une variation alternée du nombre d'atomes détectés pouvant correspondre à des franges d'interférences. L'interfrange, distance entre deux maxima, est estimée expérimentalement à $8,4 \mu\text{m} \pm 0,8 \mu\text{m}$.

Cette interfrange peut être évaluée théoriquement en utilisant la formule 3.3 du chapitre 3 avec la longueur d'onde de de Broglie puisque $L' \gg a$ et $a \gg \lambda_{\text{DB}}$. On trouve :

$$\ell_i = \frac{\lambda_{\text{DB}} L'}{a} = \frac{1,03 \cdot 10^{-10} \times 64 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot 10^{-6}} = 8,2 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 8,2 \mu\text{m},$$

résultat en bon accord avec la valeur expérimentale.

c) Interférences de molécules

A une température donnée, la vitesse d'agitation thermique d'une particule de masse m est (voir la partie *Thermodynamique*) : $v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$ où k_B est la constante de Boltzmann. La

longueur d'onde de de Broglie de cette particule est donc : $\lambda_{\text{DB}} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}}$. Pour une molécule de masse moléculaire M , donc de masse $m = M \times 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ($1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ est la masse du proton), à la température $T = 300 \text{ K}$, cette longueur d'onde s'écrit :

$$\lambda_{\text{DB}} = \frac{6,64 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{M \times 3 \times 1,66 \cdot 10^{-27} \times 1,38 \cdot 10^{-23} \times 300}} = \frac{1,46 \cdot 10^{-10} \text{ m}}{\sqrt{M}}.$$

Plus la molécule est lourde, plus cette longueur d'onde est petite et donc plus il est difficile de mettre en évidence un comportement ondulatoire.

Des chercheurs de l'université de Vienne ont pu réaliser des interférences avec des molécules de très grande taille : en 1999, le fullerène C_{60} , molécule en forme de ballon de football de masse moléculaire 720, et récemment des molécules dérivées de tétraphénylporphyrine de masse moléculaire dépassant 5000.

3 Fonction d'onde et probabilités

3.1 Analyse d'une expérience d'interférences quantiques

L'expérience de fentes de Young, représentée sur la partie gauche de la figure 6.12, peut être résumée ainsi : une particule (neutron, électron, atome...) peut parvenir en M sur l'écran soit en passant soit par la fente F_1 soit par la fente F_2 . Dans le cas où la particule a un comportement quantique la réponse à la question « la particule est-elle détectée par un détecteur placé au point M ? » est aléatoire. La réponse est « oui » avec une probabilité que l'on note

$$p(M) = \text{Prob}(\text{détection en } M).$$

La situation peut être considérée comme la superposition des deux situations :

- situation 1 : il n'y a que la fente F_1 , la particule peut parvenir en M en passant par la fente F_1 (situation représentée sur la partie droite de la figure 6.12) ;
- situation 2 : il n'y a que la fente F_2 , la particule peut parvenir en M en passant par la fente F_2 .

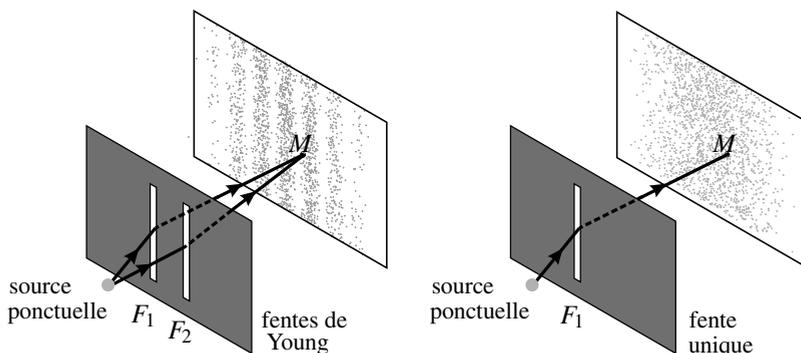


Figure 6.12 – A gauche l'expérience des fentes de Young, à droite la « situation 1 » où la fente F_2 est occultée.

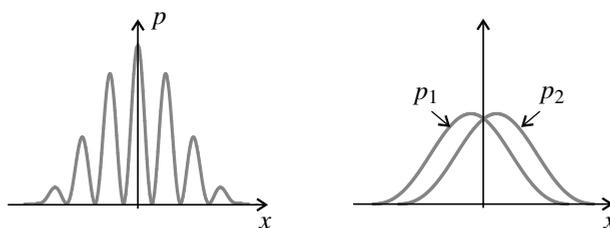


Figure 6.13 – Probabilités de détection de la particule : dans l'expérience d'interférence (à gauche) et dans les « situations 1 et 2 » (à droite).

On appelle $p_1(M)$ et $p_2(M)$ les probabilités de détection de la particule en M dans ces deux situations.

Des expériences comme celles qui ont été décrites ci-dessus permettent, par le comptage des particules arrivant sur le détecteur, de déterminer les probabilités $p(M)$, $p_1(M)$ et $p_2(M)$. Un résultat typique est visible sur la figure 6.12 où chaque point gris sur l'écran représente une particule détectée. Les allures des courbes donnant $p(M)$, $p_1(M)$ et $p_2(M)$ en fonction de la coordonnée x selon un axe perpendiculaire aux fentes sont représentées sur la figure 6.13.

Ces résultats sont surprenants. En effet, en s'appuyant sur l'image classique selon laquelle la particule passe soit par une fente, soit par l'autre, on s'attend à ce que les probabilités $p_1(M)$ et $p_2(M)$ associées aux deux chemins, s'ajoutent lorsque la particule peut emprunter les deux chemins. Or il est manifeste que :

$$p(M) \neq p_1(M) + p_2(M).$$

Plus étonnant encore, il y a des points où $p(M)$ est pratiquement nulle alors que $p_1(M)$ et $p_2(M)$ ne sont pas nulles. En ces points, la particule peut parvenir si l'une des fentes est ouverte, mais ne le peut plus si les deux fentes sont ouvertes.

Ce résultat paradoxal s'interprète par l'*interférence* entre les deux ondes associées à la particule dans les situations 1 et 2.

3.2 Notion de fonction d'onde et probabilité de détection

La grandeur qui s'additionne lorsqu'on superpose les situations 1 et 2 n'est pas la probabilité de détection en M mais la *fonction d'onde* en M . Comme une onde classique, la fonction d'onde est une fonction du point M de l'espace et du temps t . Cependant, elle prend ses valeurs dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} .

On peut associer à une particule quantique une **fonction d'onde**, $\psi(M, t)$, fonction du point M et du temps, à valeurs complexes. Cette fonction caractérise l'état de la particule.

En particulier la *probabilité* de trouver la particule au point M et à l'instant t est proportionnelle au *module au carré de la fonction d'onde*, $|\psi(M, t)|^2$.

3.3 Interprétation de l'expérience des fentes de Young

Si on note $\psi_1(M, t)$ la fonction d'onde de la particule dans la situation 1 et $\psi_2(M, t)$ la fonction d'onde de la particule dans la situation 2, dans l'expérience des fentes de Young qui est la superposition des situations 1 et 2, la fonction d'onde est :

$$\psi(M, t) = \psi_1(M, t) + \psi_2(M, t).$$

La probabilité de détection de la particule est proportionnelle au module au carré de la fonction d'onde. Or, on peut écrire (en omettant la mention de M et de t pour alléger les écritures) :

$$\begin{aligned} |\psi_1 + \psi_2|^2 &= (\psi_1 + \psi_2)(\psi_1^* + \psi_2^*) \\ &= \psi_1\psi_1^* + \psi_2\psi_2^* + \psi_1\psi_2^* + \psi_1^*\psi_2 \\ &= |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + \underbrace{\psi_1\psi_2^* + \psi_1^*\psi_2}_{\text{terme d'interférences}}. \end{aligned}$$

Ainsi : $|\psi(M, t)|^2 \neq |\psi_1(M, t)|^2 + |\psi_2(M, t)|^2$ donc $p(M) \neq p_1(M) + p_2(M)$. La différence est due au terme d'interférences.

3.4 Complémentarité

Si l'on considère les particules comme des corpuscules indivisibles, on est amené à se demander à travers laquelle des deux fentes elles passent. Or, dès que l'on tente de répondre à cette question, on provoque inmanquablement la disparition des franges d'interférences.

Une manière d'essayer de déterminer la fente traversée serait d'éclairer les particules passant par une des deux fentes avec un laser. Mais on ne peut résoudre le dilemme suivant : la longueur d'onde du laser doit être suffisamment courte pour différencier les deux fentes et suffisamment grande pour que la quantité de mouvement des photons soit assez faible pour ne pas trop perturber la particule.

Cette impossibilité est fondamentale et provient du **principe de complémentarité** énoncé par Niels Bohr : une particule quantique ne peut se comporter en même temps comme une onde et comme un corpuscule.

4 L'inégalité de Heisenberg (PTSI)

4.1 Indétermination quantique

Dans les expériences présentées ci-dessus, on a vu que des particules quantiques arrivent en des points aléatoires du plan de détection. Ainsi, quand on mesure la coordonnée x ou y d'une particule dans le plan de détection, on obtient un résultat aléatoire.

Il s'agit d'une propriété générale des systèmes quantiques :

La mesure d'une grandeur X sur un système quantique donne *a priori* un résultat aléatoire.

Soit $\langle X \rangle$ la moyenne des résultats possibles pondérés par leur probabilité. On définit en mathématiques l'écart quadratique moyen :

$$\Delta X = \sqrt{\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}.$$

L'écart quadratique moyen ΔX nous renseigne sur la dispersion des résultats possibles pour la mesure de la grandeur X . On l'appelle **indétermination quantique** de X .

Remarque

Il ne faut pas confondre l'indétermination quantique ΔX avec l'incertitude sur la mesure. ΔX est totalement indépendante de l'instrument de mesure et du protocole suivi.

Par exemple sur le document de la figure 6.9, l'incertitude sur la coordonnée x est donnée par la taille d'un point correspondant à un électron, alors que l'indétermination quantique Δx est au moins aussi grande que la largeur du champ visible.

4.2 Exemple : diffraction d'une particule par une fente

On considère une particule de quantité de mouvement $\vec{p} = p\vec{u}_z$ arrivant orthogonalement sur une fente de largeur a parallèle à (Oy) (voir figure 6.14). L'onde associée à la particule est diffractée par la fente exactement comme une onde lumineuse l'est.

Le demi-angle d'ouverture θ du faisceau diffracté est donné par :

$$\sin \theta = \frac{\lambda_{\text{DB}}}{a},$$

où λ_{DB} est la longueur d'onde de de Broglie de la particule. Si l'on fait une mesure de la coordonnée x de la particule immédiatement après la fente, le résultat de la mesure est compris entre $-\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$ donc l'indétermination quantique est du même ordre de grandeur que a :

$$\Delta x \sim a.$$

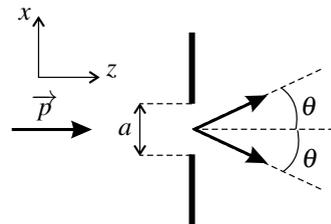


Figure 6.14 – Diffraction d'une particule par une fente.

Si l'on fait la mesure de sa quantité de mouvement p_x selon (Ox) immédiatement après la fente, la dispersion des résultats possibles est due au phénomène de diffraction. Les valeurs extrêmes de p_x correspondent aux cas représentés sur la figure où la particule part dans la direction faisant l'angle θ ou $-\theta$ avec l'axe (Oz). Les valeurs de p_x possibles sont donc comprises entre $-p \sin \theta$ et $p \sin \theta$. Ainsi, en utilisant $\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$ on trouve :

$$\Delta p_x \sim p \sin \theta = p \frac{\lambda_{DB}}{a} = \frac{h}{a}.$$

Il vient donc :

$$\Delta x \Delta p_x \sim h.$$

Ainsi, en localisant la particule avec précision à l'aide d'une fente étroite, on introduit une dispersion sur sa quantité de mouvement.

4.3 L'indétermination position-quantité de mouvement

Le résultat précédent est un cas particulier du **principe d'indétermination de Heisenberg** qui est aussi connu sous le nom, moins approprié, de principe d'incertitude de Heisenberg.

Principe d'indétermination de Heisenberg :

Les mesures de position x et de quantité de mouvement p_x selon un même axe (Ox) sont affectées d'indéterminations quantiques Δx et Δp_x dont le produit est *au moins de l'ordre de grandeur* de la constante de Planck réduite $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, ce que l'on écrit :

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar.$$



La valeur précise de la constante de Planck réduite est $\hbar = 1,056\,180 \cdot 10^{-34}$ J.s. Il est facile de retenir que : $\hbar \simeq 1 \cdot 10^{-34}$ J.s.

Cette inégalité représente une contrainte fondamentale. Si la position d'une particule est connue avec une grande précision, alors une mesure de la quantité de mouvement sera affectée d'une grande indétermination. C'est par exemple le cas pour une particule enfermée dans une « boîte » de petites dimensions. De même, si l'on a préparé la particule de manière à bien connaître sa vitesse, alors on ne peut avoir que très peu d'information sur sa position. Ainsi, l'inégalité de Heisenberg rend caduque, à l'échelle microscopique, la notion de trajectoire (pour laquelle position et vitesse sont parfaitement connues) sur laquelle la mécanique classique est fondée. En revanche pour un système macroscopique, la petitesse de la valeur de \hbar fait que la limitation posée par l'inégalité de Heisenberg n'est pas perceptible, donc la mécanique classique s'applique (on verra un exemple d'application numérique au

5 Quantification de l'énergie d'une particule confinée

5.1 Notion de quantification

Un des résultats les plus remarquables de la mécanique quantique est la quantification de certaines grandeurs physiques.

Un grandeur physique est **quantifiée** lorsqu'elle ne peut prendre qu'une suite de valeurs discrètes. On parle de **quantification**.

L'énergie mécanique d'une particule confinée dans une région limitée de l'espace est quantifiée. Le cas le plus simple est celui d'une particule dans un puits infini à une dimension.

5.2 Particule dans un puits infini à 1 dimension

a) Puits infini à 1 dimension

Le **puits infini à une dimension** est le nom donné au modèle théorique d'énergie potentielle suivant :

$$E_p(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } 0 < x < \ell, \\ \infty & \text{si } x > \ell. \end{cases}$$

Concrètement cela décrit une particule se déplaçant librement entre deux « murs » infranchissables perpendiculaires à (Ox) et distants de ℓ (voir figure 6.15). La particule est confinée dans l'intervalle $0 < x < \ell$.

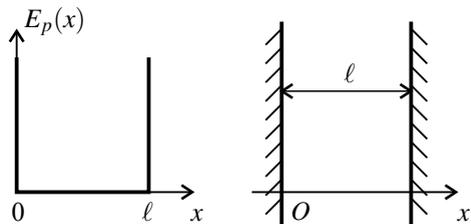


Figure 6.15 – Modèle du puits infini à 1 dimension.

b) Longueurs d'onde possibles pour la particule

Quelles sont les longueurs d'ondes possibles pour une particule placée dans le puits infini ?

L'onde de matière est limitée à l'intervalle $0 < x < \ell$. On a vu dans un chapitre précédent qu'une onde dans un espace confiné est nécessairement une onde stationnaire. Il en est obligatoirement de même pour l'onde de de Broglie associée à la particule. *L'onde associée à la particule est une onde stationnaire.*

D'autre part, la probabilité de détecter la particule en un point est proportionnelle au carré de l'amplitude de la fonction d'onde en ce point. On sait que cette probabilité est nulle pour $x < 0$ et pour $x > \ell$. Par continuité, elle est aussi nulle pour $x = 0$ et pour $x = \ell$. Ainsi l'amplitude de l'onde associée à la particule s'annule en $x = 0$ et $x = \ell$. *L'onde associée à la particule présente un nœud de vibration en $x = 0$ et en $x = \ell$.*

L'étude des ondes a montré que la distance entre deux nœuds de vibration consécutifs est égale à la moitié de la longueur d'onde. Ainsi *la largeur du puits est nécessairement un multiple entier de la demi-longueur d'onde*. Ceci s'écrit : $\ell = n \frac{\lambda_{DB}}{2}$, où n est un entier.

Finalement, l'onde associée à une particule placée dans le puits de potentiel a nécessairement une longueur d'onde de de Broglie prenant l'une des valeurs :

$$\lambda_{DB,n} = \frac{2\ell}{n} \text{ où } n \text{ est un entier.} \quad (6.6)$$

c) Niveaux d'énergie

L'énergie mécanique de la particule à l'intérieur du puits, $E = E_c + E_p$, se résume à son énergie cinétique $E_c = \frac{p^2}{2m}$ puisque l'énergie potentielle est nulle. En remplaçant p par $\frac{h}{\lambda_{DB}}$ selon la relation de de Broglie, on trouve :

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda_{DB}^2}.$$

Lorsque la longueur d'onde de de Broglie est égale à $\lambda_{DB,n} = \frac{2\ell}{n}$, alors : $E = \frac{h^2 n^2}{2m(2\ell)^2}$.

Ainsi, l'énergie ne peut prendre que l'une des valeurs suivantes :

$$E_n = n^2 \frac{h^2}{8m\ell^2} \text{ où } n \text{ est un entier.} \quad (6.7)$$

L'énergie de la particule dans le puits est *quantifiée*. Les premiers **niveaux d'énergie** sont représentés sur la figure 6.16. L'écart entre deux niveaux consécutifs :

$$E_{n+1} - E_n = (2n + 1) \frac{h^2}{8m\ell^2}$$

augmente avec n . Sa valeur minimale est $E_1 = \frac{h^2}{8m\ell^2}$.

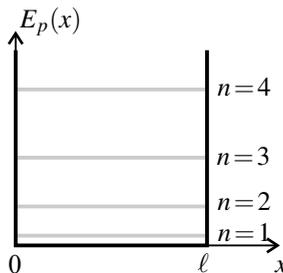


Figure 6.16 – Les 4 premiers niveaux d'énergie de la particule dans le puits infini.

Remarque

En appliquant la mécanique classique on trouverait une énergie minimale nulle et l'énergie pourrait prendre toutes les valeurs positives.

d) Transitions entre niveaux d'énergie

La particule doit être dans l'un des niveaux d'énergie précédemment déterminés. Elle peut passer d'un niveau E_n à un niveau plus bas $E_{n'}$ ($n' < n$) en émettant un photon dont la fréquence est donnée par la loi de conservation de l'énergie :

$$h\nu = E_n - E_{n'} = (n^2 - n'^2) \frac{h^2}{8m\ell^2}.$$

Elle peut aussi passer du niveau $E_{n'}$ au niveau E_n en absorbant un photon ayant cette même fréquence.

La plus petite fréquence pouvant être émise ou absorbée correspond à $n = 2$ et $n' = 1$ et son expression est :

$$\nu_0 = \frac{E_2 - E_1}{h} = \frac{3h}{8m\ell^2}.$$

Exemple

On sait réaliser des puits quantiques constitués de couches de semi-conducteurs : par exemple une couche de GaAs en « sandwich » entre deux couches de GaAlAs. On appelle ceci une hétérostructure. Le puits de potentiel correspond à la couche centrale dont la largeur ℓ est de quelques nanomètres. Ces puits quantiques sont à la base des lasers qui équipent la plupart des lecteurs de CD et de DVD de salon.

Dans l'approximation du puits de profondeur infinie, on peut calculer la fréquence ν_0 en utilisant pour les électrons à l'intérieur du puits une masse effective $m_e^* = 0,067m_e$ à la place de leur véritable masse m_e pour tenir compte du fait qu'ils sont à l'intérieur d'un semi-conducteur (la valeur 0,067 correspond au semi-conducteur AsGa). On calcule ainsi pour $\ell = 3$ nm, $\nu_0 = 4,5 \cdot 10^{14}$ Hz qui correspond à une longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{c}{\nu} = 662$ nm, soit une lumière visible de couleur rouge.

Remarque

Si ℓ tend vers l'infini, ν_0 tend vers 0 et la différence entre deux niveaux d'énergie consécutifs, $E_{n+1} - E_n$, tend vers 0 aussi. Alors les niveaux sont tellement serrés qu'ils forment quasiment un continuum : l'énergie n'est plus quantifiée. Ainsi la quantification de l'énergie provient du confinement dans une zone limitée de l'espace.

5.3 Généralisation : lien entre confinement spatial et quantification

L'exemple du puits infini montre que la notion d'onde de matière conduit, pour une particule confinée, à la quantification de l'énergie. Ceci est un fait qualitatif général :

Une particule quantique confinée dans une région de l'espace de taille finie a son énergie quantifiée.

En appliquant le modèle du puits infini, fortement idéalisé, on peut chercher une estimation de l'ordre de grandeur de l'écart entre deux niveaux d'énergie, soit $\frac{3h^2}{8m\ell^2}$ pour une particule de masse m confinée dans un espace de largeur ℓ .

Par exemple :

- pour un électron de masse $m_e \sim 10^{-30}$ kg dans un puits de la taille d'un atome, soit $\ell \sim 10^{-10}$ m, on trouve $\frac{3h^2}{8m_e\ell^2} \sim 10^{-17}$ J ~ 100 eV.
- pour un nucléon (c'est-à-dire un proton ou un neutron) de masse $m \sim 10^{-27}$ kg dans un puits de la taille d'un noyau atomique, soit $\ell \sim 10^{-15}$ m, on trouve $\frac{3h^2}{8m\ell^2} \sim 10^{-11}$ J ~ 100 MeV.

Ces valeurs sont dans les deux cas supérieures d'un facteur 10 à 100 aux valeurs expérimentales (spectres d'émission en énergie) mais le calcul interprète bien le fait que les énergies mises en jeu dans le noyau sont 10^5 à 10^6 fois plus importantes que celles qui sont mises en jeu dans l'atome.

SYNTHÈSE

SAVOIRS

- relation de Planck
- relation de de Broglie
- notion d'indétermination quantique
- inégalité de Heisenberg (PTSI)

SAVOIR-FAIRE

- évaluer des ordres de grandeur typiques intervenant dans des phénomènes quantiques
- décrire une expérience mettant en évidence la notion de photon
- décrire une expérience illustrant la notion d'onde de matière
- décrire une expérience d'interférences particule par particule
- expliquer qualitativement la nécessité d'une amplitude de probabilité dont le module est proportionnel à la probabilité
- obtenir les niveaux d'énergie du puits quantique infini
- établir le lien qualitatif entre confinement spatial et quantification

MOTS-CLÉS

- | | | |
|---------------------------|-------------------|--------------------|
| – dualité onde-corpuscule | – indétermination | – puits quantique |
| – photon | – probabilité | – niveau d'énergie |
| – onde de matière | – quantification | |